



TITLE:

減衰のあるときのひもの運動と非線形シュレディンガー方程式(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,研究会報告)

AUTHOR(S):

小貫, 明

CITATION:

小貫, 明. 減衰のあるときのひもの運動と非線形シュレディンガー方程式(ソリトン系のダイナミックスとそれに関するカオスの問題,研究会報告). 物性研究 1986, 46(1): 93-98

ISSUE DATE:

1986-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/91950>

RIGHT:

部分トーラスに分離し、ホモクリニック・カオスが起こる。これらの1次の摂動論による予想は、数値実験において、ソリトン部分に着目することにより、小さな輻射が現われるにもかかわらず、定性的に正しいことが確認された。3・ソリトン系においては、共鳴トーラス（有理比のトーラス）の重なりによる大域的カオスが原因と思われる「束縛状態」の解離現象が観測された。このように、摂動が十分小さければ、2次的な輻射も小さく、かつ、かなり長時間にわたっても、ソリトンには「悪影響」を及ぼさず、無理比トーラスに対応するほとんどの n ・ソリトンが安定であることが期待される。これは、ソリトンと輻射との間に質的な差があることによるとと思われる。例えば、ソリトンは「discrete」な自由度に対応し、輻射は連続的な自由度であることが関係しているかも知れない。

§ 4. おわりに

ここで議論したソリトンの有限次元トーラスとしての性質は、位相空間が有限な他のソリトンに対しても同様に適用され得るが、KdV ソリトンのような位相空間が有限でないソリトンに対しては、トーラスとしての興味ある特性はない。このようなソリトンに対しては、むしろ、問題はより簡単で、ソリトン-ソリトン相互作用は、短い時間の間に終了してしまうので、摂動が十分小さければ、1・ソリトンが安定なら、 n ・ソリトンの安定性はほとんど問題にならないと思われる。

参 考 文 献

- 1) 野崎一洋, 戸次直明, 月刊フィジクス, 6 (1985) 534.

減衰のあるときのひもの運動と非線型シュレディンガー方程式

京大・基研 小 貫 明

§ 1. ひもの運動を記述する非線型シュレディンガー方程式

一般に3次元での曲線は 曲率 κ と捩率 τ で完全に記述できる。 s を曲線にそった長さとする、次の Frenet-Serret 公式はよく知られている。

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{r} = \mathbf{t}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{t} = \kappa \mathbf{n},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{n} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t}, \quad \frac{\partial}{\partial s} \mathbf{b} = -\tau \mathbf{n}. \quad (1)$$

ここで $\mathbf{r}(s)$ は曲線の位置を表わし, \mathbf{t} は接線ベクトル (時間 t ではない), \mathbf{n} は法線ベクトル, $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ は陪法線ベクトルである。ここで曲線がある法則に従って動いている場合 κ と τ はどのような運動をするのか? 特別な場合として橋本氏 (1972) は次の場合を考えた。

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} = \kappa \mathbf{b} \quad (2)$$

これは減衰のない core 半径が小さい極限の渦の従う式である。注目すべきことに次の複素関数は非線型シュレディンガー方程式に従う。

$$\psi(s, t) = \kappa(s, t) \exp \left[i \int_0^s ds' \tau(s', t) \right]. \quad (3)$$

ここで,

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi = 0. \quad (4)$$

以下ではより一般の場合を考える。次のようにおく。

$$\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} = v_{//} \mathbf{t} + \text{Re}(\mathbf{v}^* \mathbf{N}) \quad (5)$$

ここで $v_{//}$ は接線方向の速度である。複素ベクトル \mathbf{N} は次のように定義する。

$$\mathbf{N} = e^{i\varphi} [\mathbf{n} + i\mathbf{b}], \quad (6)$$

$$\varphi = \int_0^s ds' \tau(s', t). \quad (7)$$

複素数の速度 v は次のように決まる。

$$v = \mathbf{N} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r}. \quad (8)$$

ここで $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{N}^* \cdot \mathbf{N}^* = 0$, $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N}^* = 2$ を利用した。すると (3) で導入した $\Psi(s, t)$ は次の式に従う。

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{\partial^2}{\partial s^2} v + \frac{\partial}{\partial s} \left[\psi \int_0^s ds \text{Re}(\psi^* v) \right] + i \psi \int_0^s ds \text{Im} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial s} v \right) \quad (9)$$

右辺で2つの積分があるが積分の下限を0とした。これは次の変換のため一般に可能である。

$$\psi \rightarrow \psi \exp \left[-i \int_0^t dt' \omega_0(t') \right], \quad s \rightarrow s - \int_0^t A(t') dt' \quad (10)$$

ここに $\omega_0(t)$ と $A(t)$ は任意にとれる。

2つの積分のため ψ の式は nonlocal になってしまう。つまり曲線のあるところが変形したとすると、その効果が瞬時に遠くまで及んでしまう。これは曲線を記述するのに線長 s を選んだことに起因している。他の選び方をすれば local な式となりうる。特別な場合として次を考えてみよう。

$$v = -i \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial s} \right)^n \psi, \quad (11)$$

ここで c_n は任意の実数。すると(9)の積分は逐行できて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi = & \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} c_n \left[\psi^{(n+2)} + \frac{1}{2} |\psi|^2 \psi^{(n)} \right] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} (-i)^{n+2m+1} c_n \psi^{(m)*} \frac{\partial}{\partial s} [\psi \psi^{(n-m-1)}], \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\psi^{(n)} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^n \psi$ 。もし $c_n = -\delta_{n,0}$ なら橋本氏の場合となる。もし c_0 と c_1 があり $c_n = 0$ ($n \geq 2$)なら広田氏の場合(1973)となる。

最後に時間反転に対する変換則を考える。

$$\begin{aligned} t &\rightarrow -t, \quad n \rightarrow n, \quad b \rightarrow -b, \\ \psi &\rightarrow \psi^*, \quad N \rightarrow N^*, \quad v \rightarrow -v^* \end{aligned} \quad (13)$$

(11) 式の場合は可逆である。

§ 2. 2次元

2次元では $\tau = 0$, $\psi = \kappa$, $v = \mathbf{n} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} \right)$ である。(9)式は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa \right)_s = \frac{\partial^2}{\partial s^2} v + \frac{\partial}{\partial s} \left[\kappa \int_0^s ds \kappa v \right]. \quad (14)$$

これはBrowerらによってすでに導かれている(1984)。面白いことに $\frac{\partial}{\partial s} \theta = \kappa$ より決まる角度 θ を用いて曲線を記述すると(14)は次のような local form に変形される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \kappa \right)_\theta = \kappa^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 1 \right) v \quad (15)$$

3次元の式(9)でも、適当な角度変数で local form に直せる可能性があるかもしれないが、わからない。

(14)もしくは(15)に基づいて様々な面白い解が見つかる。例として

$$v = \kappa + h \quad . \quad (16)$$

ここで h は定数。

(i) 定常解は一様に進む曲線である。

$$v = v_0 \cos \theta \quad , \quad (v_0 : \text{定数}) . \quad (17)$$

(ii) spiral 解。 $\kappa = -h H(\theta - \Omega t)$ としてみると, (15) より

$$\frac{d^2}{d\phi^2} H + H - 1 = \Omega H^{-2} \frac{d}{d\phi} H, \quad (18)$$

ここで $\phi = \theta - \Omega t$. (18) は結晶成長で知られたスパイラルを解としてもつ (Burton et al, 1950)。

(iii) $h = 0$ の場合の bend 解。 $\kappa = (2t)^{-1/2} F(\theta)$ とおくと, (15) より

$$F + F^2 \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 1 \right) F = 0 \quad . \quad (19)$$

これは積分して,

$$\left(\frac{d}{d\theta} F \right)^2 + F^2 + 2 \ln F = \text{const} . \quad (20)$$

この場合の曲線は, 図 1 に示すような屈曲を表わしている。図の A は F の最大値もしくは κ の最大値を $(2t)^{-1/2} A$ としている。

§ 3. 3次元

減衰があるよう橋本氏の場合を拡張してみる。

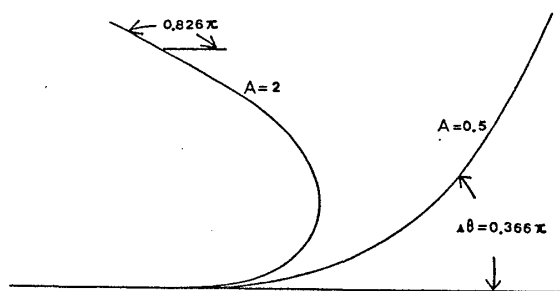


図 1.

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{r} = (1 + \beta_x) \kappa \mathbf{b} + \beta_y \kappa \mathbf{n} + v_{\parallel} \mathbf{t} \quad (21)$$

ここで β_x と β_y は定数。超流動 ^4He での渦の運動は (21) に従う (ただしマクロな流れがないとする)。臨界点 $T = T_\lambda$ 近くでは β_x と β_y は発散する。すると (9) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi = & (1 + \beta_x) \left[\frac{i}{2} |\psi|^2 \psi + i \frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi \right] \\ & + \beta_y \left[\frac{\partial^2}{\partial s^2} \psi + i \psi \int_0^s ds \operatorname{Im} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial s} \psi \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\psi \int_0^s ds |\psi|^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

(13) 式に示したように、 β_y に比列する部分が減衰を表わす。

以下では、特に(19)、(20)で示した2次元bendの3次元に拡張された解を紹介する。即ち、(22)の厳密解として次のようなものがある。

$$\psi = t^{ic} (2\beta_y t)^{-1/2} \Psi(p), \quad (23)$$

$$p = s / (2\beta_y t)^{1/2}, \quad (24)$$

ここで c は実定数で $\Psi(p)$ は複素関数であり次の形となる。

$$\Psi(p) = G(p)^{1-ia} \quad (25)$$

$G(p)$ は実関数で、

$$a = (1 + \beta_x) / \beta_y. \quad (26)$$

そこで(23)を(22)に代入すると、

$$(1 + a^2) \frac{d}{dp} G + G \int_0^p dp (1 + G^2), \quad (27)$$

$$c = -\frac{1}{4} a A^2 \quad (28)$$

ここで $A \equiv G(0)$ 。(27)で決まる G は(19)、(20)で決まる κ を $\kappa = (2t)^{-1/2} F(s/(2t)^{1/2})$ と書き直してえられる $F(p)$ と次のように結びつく (θ は消去される)。

$$G(p) = F(p / \sqrt{1 + a^2}) \quad (29)$$

上記解に対応する曲線 $\mathbf{r}(s, t)$ は次のようにスケールされる。

$$\mathbf{r}(s, t) = (2\beta_y t)^{1/2} (X(p), Y(p), Z(p)) \quad (30)$$

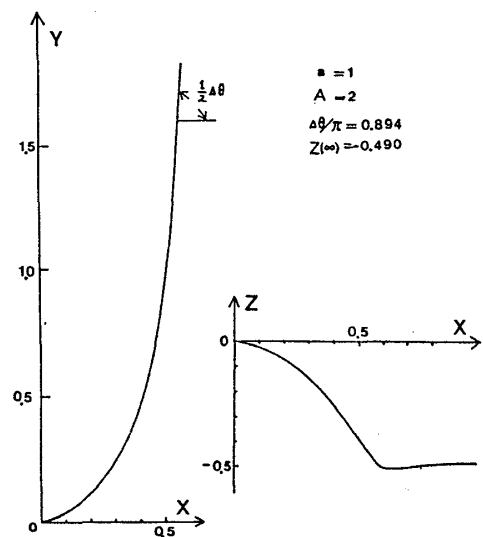


図 2.

図2に $a=1$, $A=2$ の場合の (X, Y, Z) を書いておく。

§ 4. 最後に

上記 bend 解の物理的意義を述べる。超流動状態で熱流が大きいと多くの渦ができる。渦と渦は必ず衝突する。その場合図3に示すような reconnection が起こる。この event の後に鋭い cusp = bend ができるのである。この bent の長時間ふるまい (減衰が重要な時間スケールで) は上に示した bend 解で記述できる。

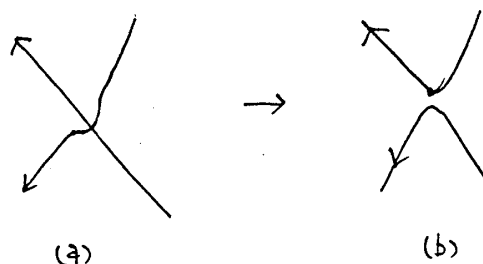


図 3.

Schwarz は bend の運動を数値計算している (1985)。彼の式は (21) と同じものである。

最後に bend 解 (23) ~ (25) は 野崎・戸次氏の厳密解 (減衰のある非線型シュレディンガー方程式) とよくにていることをいっておく。以上の内容は Progress 74 (1985) 979 に発表しました。

また Navier-Stokes 式に従う流体で渦の衝突・reconnection は大変重要な素過程である。この場合渦を表わす曲線の運動方程式は、非局所的 (long range) になる。何らかの厳密解か stochastic な近似等があればよいと強く期待し努力してみるつもりであるが……。

2次元渦糸系の可積分性と渦衝突について

東大・理 木 村 芳 文

§ 1. 2次元渦糸系の可積分性

渦糸とは2次元の縮まない渦無し流れの特解であり、無限領域における N 個の渦糸の運動は次の方程式によって記述される。

$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{N'} \frac{\Gamma_k}{z_j - \bar{z}_k} \quad (j = 1, 2, \dots, N) \quad (1)$$

ここで $z_j = x_j + iy_j$ は j 番目の渦糸の複素 z 平面における位置, Γ_j はその強さである。 \bar{z}_j は複素共役を表わし、和は $\bar{z}_j = \bar{z}_k$ を除いてとるものとする。

方程式 (1) は次のような Hamilton 関数を導入することにより Hamilton 形式に書けること